HISTORIA MATHEMATICA 5 (1978), 411-418

RICERCHE DI P. TARDY SUI DIFFERENZIALI DI INDICE QUALUNQUE, 1844-1868

BY UMBERTO BOTTAZZINI,
UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA, ITALY

SUMMARIES

P. Tardy si occupò di differenziali di indice qualunque in diverse occasioni per circa vent'anni, dal 1844 al 1868. Il suo punto di partenza si differenziò da quello di Liouville e i suoi risultati hanno qualche interesse perchè anticipano in qualche punto quelli di Riemann, pubblicati nel 1876. Gli studi di Tardy contribuiscono inoltre a chiarire lo stato delle ricerche in Italia verso la metà del secolo scorso.

P. Tardy worked on fractional calculus on various occasions over about twenty years, from 1844 to 1868. His point of view differed from that of Liouville, and his results are interesting because in some ways they anticipated those of Riemann. Furthermore, Tardy's studies help to indicate the status of Italian research around the middle of the last century.

1.

Ricordando all'Accademia dei Lincei la figura e l'opera di Placido Tardy (1816-1914) da poco scomparso, Gino Loria [1915] ne metteva in rilievo, tra le ricerche più significative, gli studi sui differenziali di indice qualunque, da Tardy compiuti nell'arco di vent'anni.

Loria in quell'occasione scriveva: "il fatto che i differenziali ad esponente fratto siano stati vantaggiosamente usati nel trattare specialissime equazioni integrali, porta a congetturare che fra quella teoria ed il più moderno (ed anche il più italiano!) ramo dell'analisi matematica esistano legami profondi, meritevoli di esser posti in completa luce" [Loria 1915, 512]. A parte la sorpendente parentesi di inaspettato nazionalismo--ma siamo nel 1915!--non sembra che la previsione di Loria fosse infondata [Ross 1974a].

Recentemente il professor Ross [1977] ha tracciato un rapido quadro dello sviluppo storico del "calcolo frazionario": egli non vi menzione l'opera di Tardy, come neppure nella sua più

0315-0860/78/0054-0411$02.00/0

vasta rassegna bibliografica sull'argomento [Ross 1974b]. E' vero che le ricerche di Tardy non soddisfano del tutto i criteri adottati dal professor Ross per l'inclusione nella sua rassegna: "first investigation of an important development, and frequency of citation" [Ross 1974b, 3]. I lavori di Tardy furono infatti scarsamente discussi e citati dai contemporanei. Penso tuttavia che essi meritino di essere segnalati perchè Tardy vi sviluppa in maniera originale alcuni punti della teoria dei differenziali ad indice qualunque rispetto alla definizione datane da Liouville [1832]. C'è inoltre un secondo motivo, di altra natura.

E' tesi largamente accreditata nella storiografia che la rinascita della matematica italiana nell'Ottocento abbia come data indicativa d'inizio il celebre viaggio di Betti, Brioschi e Casorati (1858) per le università di Francia e Germania, viaggio la cui importanza fu per la prima volta (e giustamente) sottolineata da Volterra al Congresso di Parigi del 1900.

Se certamente quel viaggio segna una data decisiva per la matematica italiana, se ne comprende appieno il significato solo se si collega all'opera di numerosi altri matematici italiani, che quella rinascita prepararono e favorirono. Ricordo qui i nomi di Bellavitis e Tortolini, ad esempio o di Codazzi o Genocchi. Tra questi è anche Tardy, che pur non è certamente matematico della statura di Betti, Brioschi o Cremona, tutti suoi contemporanei o di poco più giovani.

Loria [1915, 509-513] lo definisce "lettore instancabile", uomo dotato di grande "acume critico e di straordinaria abilità nel calcolo"; e avanza l'ipotesi che sia proprio "la preferenza da lui manifestata per il calcolo sul ragionamento" ad alienargli l'interesse dei giovani matematici.

La produzione scientifica di Tardy, piuttosto limitata di numero (19 lavori) e occasionale nelle motivazioni non riveste nel complesso particolare interesse. Le due memorie [1858 e 1868] sui differenziali di indice qualunque sono sicuramente tra le cose più originali.

Le prime ricerche sull'argomento furono da Tardy--allora ventottenne professore di "matematica sublime" all'Università di Messina--presentate al Congresso degli scienziati italiani che si tenne a Milano nel 1844. Gabrio Piola e Giovanni Piana, incaricati di presentarne una relazione, ne diedero un giudizio incoraggiante. Tali ricerche furono a lungo tenute nel cassetto da Tardy, che si decise solo nel 1858 a farle stampare sul primo numero dei nuovi *Annali di Matematica*, la cui pubblicazione era stata decisa proprio durante un incontro tra Betti, Brioschi, Genocchi e Tortolini svoltosi nella casa di Tardy a Genova.

2.

L'articolo del 1858 riproduce nella sostanza, tranne alcune modifiche marginali, la memoria letta 14 anni prima al congresso di Milano. Tardy parte dalla critica della formulazio- di Liouville [1832]. Assumendo, come nella prima definizione di Liouville, l'equazione

$$\frac{d^{\mu} e^{mx}}{dx^{\mu}} = m^{\mu} e^{mx},$$

Tardy osserva che Liouville "è costretto a trasformare in una serie di esponenziali ciascuna funzione per poterla differenziare, il qual processo, oltre le difficoltà che può presentare, ci sembra del tutto artificiale, e che la ricerca dei differenziali di una funzione debba essere indipendente da quella trasformazione" [1858, 136].

Egli aggiunge inoltre che alcuni risultati di Liouville gli sembrano "talmente singolari" da essere insoddisfacenti per "lo spirito dell'analista" e da averlo indotto a cercare altra via che "faccia vedere spontanea la relazione tra il caso degl'indici frazionari e quello degl'interi".

Tardy non sottolinea invece il fatto che, per la definizione di Liouville, μ deve essere limitato a valori per i quali la serie sia convergente. Egli è al corrente dei lavori di Peacock [1833], Greatheed [1839], Kelland [1839 e 1846], Center [1848 e 1849] come pure dell'ultimo lavoro di Liouville [1855] sull'argomento. Ovviamente ignora le ricerche di Riemann, pubblicate solo più tardi. Tardy dichiara esplicitamente di sottomettere il proprio lavoro "principalmente al giudizio dell'eminente matematico francese, il quale ha manifestato di voler forse riprendere sopra nuova base il calcolo in questione" [1858, 137]. Ma, come è noto, Liouville non tornò più sull'argomento.

Il punto di partenza di Tardy è la formula:

$$(1) \quad \int^{(\mu)} \phi(x) dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{\mu} \phi(x) - \frac{x}{\mu+1} \phi'(x) + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\mu+2} \phi''(x) - \dots \right\}$$

che si può scrivere in forma più compatta:

$$\int^{(\mu)} \phi(x) dx^{\mu} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \phi^{(r)}(x),$$

Tardy scrive che la (1) si può mettere sotto la forma

$$\int^{\mu} \phi(x) dx^{\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{2\pi} x^{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+xe^{yi}) e^{\mu y i} dy,$$

ottenbile da quella di Laplace

$$\frac{d^\mu \phi(x)}{dx^\mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi\xi^\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+\xi e^{yi}) e^{-\mu y i} dy,$$

qualora "si fosse sostituito $-\mu$ a μ, cangiato perciò il segno d in $\int$, e si fosse posta la quantità ξ aguale ad x." Tardy non si pone alcun problema sulla legittimità del formalismo ma si limita nel seguito a verificare le sue formule per alcuni casi di funzioni semplici, osservando che la formula (1) da cui è partito è dimostrata mediante successive integrazioni per parti nel caso μ intero e che "il secondo membro potendo rappresentare il termine generale della serie degli integrali, darà per μ frazionario dei valori interposti, che si possono considerare come integrali corrispondenti a quel valore fratto dell'indice" [1858, 138].

Nel caso che $\phi(x) = x^n$ con $n+1 > 0$ ottiene la formula di Riemann:

$$\frac{d^\tau x^n}{dx^\tau} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\tau+1)} x^{n-\tau} \qquad \begin{array}{l} \mu > 1, \\ \mu+\tau = 1, \end{array}$$

e dice che ponendo $\tau = n$, il risultato della differenziazione è una costante, la cui derivata a indice fratto è diversa da zero [1858, 139].

Tardy applica poi la sua definizione alle funzioni $\log x$, $\sin mx$, $\cos mx$, e alla determinazione della funzione ϕ nell'equazione di Liouville

$$\sqrt{2x} \int_0^\infty \sqrt{\theta} \quad \phi(x + \theta)d\theta = a^2,$$

e nell'equazione di Abel

$$\int_0^x \frac{\phi'(\theta)d\theta}{\sqrt{x - \theta}} = f(x)$$

ottenendo i risultati noti.

Il punto di partenza (1) assunto da Tardy doveva aver destato qualche perplessità nei curatori degli *Annali*, tanto da indurlo ad aggiungere un *post scriptum* dietro suggerimento di Brioschi.

Per giustificare il suo punto di vista Tardy scrive che "supposto p intero la derivazione a indice $1/p$ di una funzione $\phi(x)$ è quell'operazione la quale ripetuta p volte sulla funzione medesima da per risultato $\phi'(x)$. Possiamo dunque considerare la definizione dei differenziali ad indice qualunque come racchiusa nell'equazione

$$(2) \qquad \int^{(n)}\left\{\int^{(m)}\phi(x)dx^m\right\}dx^n = \int^{(m+n)}\phi(x)dx^{m+n}$$

la quale indica ancora una delle leggi principali del simbolo di operazione $\int$." [1858, 146] Egli dimostra poi che la (1) verifica questa richiesta.

3.

Tardy era in contatto con numerosi matematici italiani e con alcuni stranieri (tra cui Cayley, Klein, Schläfli, Sylvester) [Loria 1915]. Nel 1843 aveva conosciuto a Messina Lejeune-Dirichlet, in viaggio in Italia con Jacobi e Steiner. Nel 1863 scrive a Betti (il 14 Ottobre) di aver conosciuto a Firenze "l'impareggiabile Riemann". La figura e le idee di Riemann sono argomento di alcune lettere fra Tardy e Betti. Loria [1915] riporta due lunghe lettere di Betti del 1863 sulla connessione degli spazi, dove il matematico pisano illustra all'amico quanto Riemann gli ha detto sulla questione. In un'altra occasione (15 gennaio 1863), riferendosi ad un'osservazione di Riemann sulla derivabilità delle funzioni, riportatagli da Betti, Tardy scrive che già Dirichlet circa vent'anni prima gli aveva fatto "notare qualcosa di simile". Qui Tardy mostra di non aver compreso la questione, poichè aggiunge: "più tardi mi è occorso l'esempio di $y = x \sin (1/x)$ che per $x = 0$ non si può dire che abbia una derivata determinata. Però mi pare che questo non attacchi il teorema generale sull'esistenza della derivata, il quale è relativo ad un valore qualunque della variabile e non ad un valore speciale".
E conclude: "credo di dimostrare in generale l'esistenza della derivata in modo alquanto diverso da quello che si suol tenere" [1].

La corrispondenza di Tardy è stata studiata da Loria, che segnala [1915] una lunga lettera di Schläfli interessante per il nostro argomento. Schläfli scrive a Tardy (4 Ottobre 1865): "altre volte l'indice fratto di differenziazione mi sembrava sospetto; ma adesso la lettura della sua memoria [...] me ne à dato una esatta idea" [Loria 1915, 527] che interpreta come modo per riunire in una medesima formula "il complemento della serie di Taylor

$$D^{-n}f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(t)dt$$

(per un'intero negativo $-n$) e $D^n f(x)$ riguardato come

$$\Gamma(n+1)\ [h^n|f(x+h)] = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int f(x+h)\frac{dh}{h^{n+1}}."$$

(Con "$[h^n|f(x+h)]$" Schläfli intende il coefficiente di h^n nello

sviluppo di $f(x+h)$; inoltre h è supposto percorrere un cammino chiuso intorno all'origine nel piano complesso).
Questo integrale, scrive Schläfli, si può scrivere

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_x (t-x)^{-n-1}f(t)dt$$

"purchè il giro che fa t attorno ad x non inchiuda un punto di discontinuità di $f(t)$". L'estremo inferiore dell'integrale è arbitrario quando n è intero positivo; nel caso di n frazionario, dice Schläfli, il valore dell'integrale dipenderà dall'estremo inferiore d'integrazione (punto di partenza del cammino), che dev'essere zero, perche le due formule convergano nell'unica

$$D^m f(x) = \frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi}\int (t-x)^{-m-1}f(t)dt$$

dove $x > 0$.

Sulla formula (2) data da Tardy, Schläfli osserva che se in un intorno dell'origine f( ) è sviluppabile in serie di Taylor si ha

$$D^m f(x) = \sum_{\lambda=0} \frac{x^{\lambda-m}}{\Gamma(\lambda-m+1)} f^{(\lambda)}(0),$$

espressione che diviene infinita allorchè $m > 0$ e non è quindi integrabile $\int_0 D^m f(x)\,dx$ se $m > 1$. "Ecco la ragione perchè, se m-1 e n sono positivi, si ha $D^m(D^{-n}f(x)) = D^{m-n}f(x)$ ma non $= D^{-n}(D^m f(x))$" [Loria 1915, 528]. Infine mostra come il moto dell'acqua nei vasi di rivoluzione gli abbia fornito un esempio dove non vale la "formula quistationevole" $D^2(D^{-1/2}) = D^{-1/2}(D^2)$.

Se si esclude l'interessamento di Schläfli, le ricerche di Tardy non sembrano aver richiamato l'attenzione dei matematici europei, dando credito al "lamento che i nostri lavori non sono conosciuti fuori d'Italia" denunciato dai curatori degli *Annali di Matematica* nell' *Avviso* posto in apertura del primo numero. La situazione era però già radicalmente mutata alla fine degli anni sessanta, come scriveva Beltrami a Betti (15 gennaio 1872) riportando non senza una punta di soddisfazione l'opinione espressagli da C. Neumann, secondo cui "in Italien und in Deutschland ist es doch dieselbe Luft, die wir atmen" [1].

4.

Su invito del principe Boncompagni, Tardy ritornava sull'argomento scrivendo una nota di carattere storico su una formula di Leibniz [1868] per il primo numero del *Bulettino di* *bibliografia e di storia*. In questa occasione alla ricostruzione storica Tardy aggiungeva una propria dimostrazione, omessa in [1858], che la formula

$$D^{\mu}(uv) = \sum_{r} \binom{\mu}{r}^{\mu-r} D^{\mu-r}uD^{r}v$$

valeva per μ qualunque. La dimostrazione è condotta partendo dalla (1) e sostituendo: $\phi(x) = uv$.

In questa circostanza, la nota di Tardy veniva tradotta e inserita nei *Nouvelles anneles de mathématiques*; lo stesso Boncompagni [1869] ne dava un accurato rendiconto bibliografico, e sollecitava l'attenzione di Borchardt, che ne presentava un estratto in una comunicazione [1869] all'Accademia di Berlino.

NOTA

1. Le lettere di Tardy e Beltrami a Betti sono conservate presso la biblioteca della Scuola Normale Superiore, Pisa, Italia.

FONTI BIBLIOGRAFICHE

Boncompagni, B 1869 Intorno a uno scritto del Sig. Prof. Placido Tardy *Bull. di bibl. e di storia delle sci. mat. e fis.* 2, 273-274

Borchardt, G 1869 Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux differentielles à indice quelconque *Bull. di bibl. e di storia delle sci. mat. e fis.* 2, 277-278

Center, W 1848a On the value of $(d/dx)^{\theta}x^{0}$ when θ is a positive proper fraction *Cambridge and Dublin Math. J.* 3, 163-169

——— 1848b On differentiation with fractional indices, and on general differentiation *Cambridge and Dublin Math. J.* 3, 274-285

——— 1849 On fractional differentiation *Cambridge and Dublin Math. J.* 4, 21-26

Greatheed, S S 1839 On general differentiation *Cambridge Math. J.* 1, 11-21, 109-117

Kelland, P 1839 On general differentiation *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* 14, 567-618

——— 1849 On general differentiation *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* 16, 241-303

Liouville, J 1832a Mémoire sur quelques quéstions de géometrie et de méchanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces quéstions *J. Ecole Polytech.* 13, Cahier 21, 1-69

Liouville, J 1832b Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques *J. Ecole Polytech.* 13, Cahier 21, 71-162

——— 1832c Mémoire sur l'intégration de l'équation $(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2} + (qx+r)\frac{dy}{dx} + sy = 0$ à l'aide des différentialles à indices quelconques *J. Ecole Polytech.* 13, Cahier 21, 163-186

——— 1855 Sur une formule pour les différentielles à indices quelconques à l'occasion d'un mémoire de M. Tortolini *J. Math. pures appl.* 20(1),

Loria, G 1915 [senza titolo] *Atti della R. Acc. Lincei. Rend. classe di sci. fis. nat.* 24, 505-531

Peacock, G 1833 Report on the recent progress and present state of affairs of certain branches of analysis *Rep. British Assoc. Advancement Sci.* 185-352

Ross, B (ed) 1974a *Fractional calculus and its applications* Springer-Verlag

——— 1974b Historical survey, in: Oldham & Spanier, *The Fractional Calculus* Academic Press

——— 1977 The development of fractional calculus 1695-1900 *HM* 4, 75-89

Tardy, P 1858 Sui differenziali a indice qualunque *Annali mat. pura appl.* 1, 135-148

——— 1868 Intorno ad una formula del Leibniz *Bull. di bibliogr. e di storia delle sci. mat. fis.* 1, 177-186 = *Nouvelles ann. de math.* 7(2), (1869)